Системы счисления

Для записи информации о количестве объектов используются числа. Числа записываются с использованием особых знаковых систем, которые называются системами счисления. Алфавит системы счисления состоит из символов, которые называются цифрами.

Система счисления – это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.

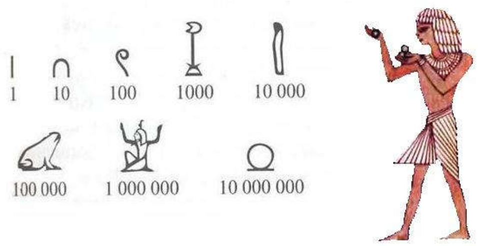
Все системы счисления делятся на две большие группы: позиционные и непозиционные. В позиционных системах счисления количественное значение цифры зависит от ее положения в числе, а в непозиционных – не зависит.

1) Непозиционные системы счисления.

Это такая знаковая система, в которой нет позиций для знаков числа, или принцип "прочтения" числа от позиции не зависит. В ней также существуют свои правила записи или вычислений.

Пример:

1) Как только люди начали считать, у них появилась потребность в записи чисел. Находки археологов на стоянках первобытных людей свидетельствуют о том, что первоначально количество предметов отображали равным количеством каких-либо значков (бирок): зарубок, черточек, точек. Позже, для облегчения счета, эти значки стали группировать по три или по пять. Такая система записи чисел называется **единичной (унарной)**, так как любое число в ней образуется путём повторения одного знака, символизирующего единицу. Отголоски единичной системы счисления встречаются и сегодня.
2) **Древнеегипетская десятичная непозиционная система счисления**. Примерно в третьем тысячелетии до нашей эры древние египтяне придумали свою числовую систему, в которой для обозначения ключевых чисел 1, 10, 100 и т.д. использовались специальные значки – иероглифы. Все остальные числа составлялись из этих ключевых при помощи операции сложения. Система счисления Древнего Египта является десятичной, но непозиционной. В непозиционных системах счисления количественный эквивалент каждой цифры не зависит от ее положения (места, позиции) в записи числа. Например, чтобы изобразить 3252 рисовали три цветка лотоса (три тысячи), два свернутых пальмовых листа (две сотни), пять дуг (пять десятков) и два шеста (две единицы). Величина числа не зависела от того, в каком порядке располагались составляющие его знаки: их можно было записывать сверху вниз, справа налево или вперемежку.



3) **Алфавитные системы счисления**. Более совершенными непозиционными системами счисления были алфавитные системы. К числу таких систем счисления относились греческая, славянская, финикийская и другие. В них числа от 1 до 9, целые количества десятков (от 10 до 90) и целые количества сотен (от 100 до 900) обозначались буквами алфавита. В алфавитной системе счисления Древней Греции числа 1, 2, ..., 9 обозначались первыми девятью буквами греческого алфавита, и т.д. Для обозначения чисел 10, 20, ..., 90 применялись следующие 9 букв а для обозначения чисел 100, 200, ..., 900 – последние 9 букв.

У славянских народов числовые значения букв установились в порядке славянского алфавита, который использовал сначала глаголицу, а затем кириллицу.

В России славянская нумерация сохранилась до конца XVII века. При Петре I возобладала так называемая арабская нумерация, которой мы пользуемся и сейчас. Славянская нумерация сохранилась только в богослужебных книгах.

4) **Римская система счисления**. Примером непозиционной системы, которая сохранилась до наших дней, может служить система счисления, которая применялась более двух с половиной тысяч лет назад в Древнем Риме. Римскими цифрами пользовались очень долго. Еще 200 лет назад в деловых бумагах числа должны были обозначаться римскими цифрами (считалось, что обычные арабские цифры легко подделать). Римская система счисления сегодня используется, в основном, для наименования знаменательных дат, томов, разделов и глав в книгах.

В основе римской системы счисления лежали знаки I (один палец) для числа 1, V (раскрытая ладонь) для числа 5, X (две сложенные ладони) для 10, L для 50, а для обозначения чисел 100, 500 и 1000 стали применять первые буквы соответствующих латинских слов (Centum – сто, Demimille – половина тысячи, Mille – тысяча). Чтобы записать число, римляне разлагали его на сумму тысяч, полутысяч, сотен, полусотен, десятков, пятков, единиц.

Число (в десятичной системе счисления)	Римское число (буква латинского алфавита)
1	I
5	V
10	X
50	L
100	C
500	D
1000	M

Например, десятичное число 28 представляется следующим образом:

XXVIII=10+10+5+1+1+1=28 (два десятка, пять, три единицы).

Для записи промежуточных чисел римляне использовали не только сложение, но и вычитание. При этом применялось следующее правило: каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к его значению, а каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него. Например, IX – обозначает 9, XI – обозначает 11.

Десятичное число 99 имеет следующее представление:

XCIX = –10 + 100 – 1 + 10 = 99.

Некоторые крупные числа могут быть представлены разными способами, что является одним из минусов римской системы счета. Например, десятичное число 1996 имеет следующее представление:

1995 = 1000 + 500 + (500 – 5) +1 = MDVDI

или 1996 = 1000 + (1000 – 10) + 5 + 1 = MXMVI или 1996 = 1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + 100 +50 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5 + 1 = MDCCCCLXXXXVI.

Непозиционные системы счисления имеют ряд существенных недостатков:

- Существует постоянная потребность введения новых знаков для записи больших чисел.
- Невозможно представлять дробные и отрицательные числа.
- Сложно выполнять арифметические операции, так как не существует алгоритмов их выполнения.

2) Позиционные системы счисления.

Позиционная систе́ма счисле́ния – это система счисления, в которой один и тот же числовой знак (цифра) в записи числа имеет различные значения в зависимости от того места (разряда), где он расположен.

Изобретение позиционной нумерации, основанной на поместном значении цифр, приписывается шумерам и вавилонянам; развита была такая нумерация индусами и имела неоценимые последствия в истории человеческой цивилизации. К числу таких систем относится современная десятичная система счисления, возникновение которой связано со счётом на пальцах. В средневековой Европе она появилась через итальянских купцов, в свою очередь заимствовавших её у мусульман.

Количество (p) различных символов, используемых для изображения числа в позиционной системе счисления, называется основанием системы счисления.

Основание показывает, во сколько раз изменяется количественное значение цифры при перемещении ее в младший или старший разряд.

Набор символов, используемый для обозначения цифр, называется алфавитом. Так, например, алфавит двоичной системы счисления содержит всего два символа: 0 и 1, а алфавит шестнадцатеричной системы – 16 символов: десять арабских цифр и шесть латинских букв ($0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F$).

Основанием позиционной системы счисления может быть любое натуральное число (например, $5, 21, 37$). Во избежание путаницы справа от числа нижним индексом приписывают основание: 101101_2, 367_8, $3B8A_{16}$, $3AO_{37}$.

Десятичная система счисления

Основание: $p=10$.

Алфавит: $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$.

Десятичная система счисления наиболее распространенная система счисления в мире. Используется при повседневном счете. Для записи чисел используются арабские цифры (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Число в десятичной системе счисления записывается в виде суммы числового ряда степеней основания (в данном случае 10), в качестве коэффициентов которых выступают цифры данного числа.

Пример: $765{,}345_{10}=7\cdot10^2+6\cdot10^1+5\cdot10^0+3\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+5\cdot10^{-3}$

Двоичная система счисления

Основание: $p=2$.

Алфавит: $0,1$.

Двоичную систему счисления широко применяют в вычислительной технике.

Число в двоичной системе счисления записывается в виде суммы числового ряда степеней основания (в данном случае 2), в качестве коэффициентов которых выступают цифры данного числа.

Пример: $1011{,}01_2=1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0+0\cdot2^{-1}+1\cdot2^{-2}$

Восьмеричная система счисления

Основание: p=8.
Алфавит: 0,1,2,3,4,5,6,7.

Восьмеричная система чаще всего используется в областях, связанных с цифровыми устройствами. Характеризуется лёгким переводом восьмеричных чисел в двоичные и обратно, путём замены восьмеричных чисел на триады (группы по 3 разряда) двоичных. Ранее широко использовалась в программировании и вообще компьютерной документации, однако в настоящее время почти полностью вытеснена шестнадцатеричной.

Число в восьмеричной системе счисления записывается в виде суммы числового ряда степеней основания (в данном случае 8), в качестве коэффициентов которых выступают цифры данного числа.

Пример: $567{,}12_8=5\cdot8^2+6\cdot8^1+7\cdot8^0+1\cdot8^{-1}+2\cdot8^{-2}$

Шестнадцатеричная система счисления

Основание: p=16.
Алфавит: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*A*,*B*,*C*,*D*,*E*,*F*.

Здесь только десять цифр из шестнадцати имеют общепринятое обозначение 0,1,...,9. Для записи остальных цифр (10,11,12,13,14 и 15) обычно используются первые шесть букв латинского алфавита (A, B, C, D, E, F).

Шестнадцатеричная система счисления, на сегодняшний день является наиболее популярным средством компактной записи двоичных чисел. Очень широко используется при разработке и проектировании цифровой техники.

Число в шестнадцатеричной системе счисления записывается в виде суммы числового ряда степеней основания (в данном случае 16), в качестве коэффициентов которых выступают цифры данного числа.

Пример: $10FC_{16}=1\cdot16^3+0\cdot16^2+F\cdot16^1+C\cdot16^0$

Помимо рассмотренных выше позиционных систем счисления, существуют и другие, например:

- троичная (0,1,2);
- пятеричная (0,1,2,3,4)
- двенадцатеричная (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*A*,*B*)
- тринадцатеричная (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,*A*,*B*,*C*).
- и так далее.

Обратите внимание!

В системах счисления с основанием больше 10 для представления чисел после цифр 0,1,2,...,9 используют латинские буквы в алфавитном порядке: *A* (10), *B* (11), *C* (12) и т. д.

Перевод из одной системы счисления в другую.

1) Перевод чисел из какой-либо системы счисления в десятичную.

Для преобразования чисел из какой-либо системы счисления в десятичную необходимо записать данное число в развернутой форме и вычислить его значение.

Алгоритм перевода из какой-либо системы счисления в десятичную:

Для того, что бы перевести число из какой-либо системы счисления в десятичную, мы каждую цифру этого числа умножаем на основание системы в которой находимся в соответствующей степени и складываем. Степени считаем по количеству цифр в числе с право на лево, начиная с «0».

Например. Перевести в десятичную систему счисления:

$$\overset{6}{1}\overset{5}{0}\overset{4}{1}\overset{3}{1}\overset{2}{0}\overset{1}{1}\overset{0}{1}_2 = 1*2^6+0*2^5+1*2^4+1*2^3+0*2^2+1*2^1+1*2^0$$
$$= 1*64+0*32+1*16+1*8+0*4+1*2+1*1$$
$$= 64+16+8+2+1 = 91_{10}$$

$$\overset{3}{3}\overset{2}{2}\overset{1}{5}\overset{0}{7}_8 = 3*8^3+2*8^2+5*8^1+7*8^0 = 3*512+2*64+5*8+7*1$$
$$= 1536+128+40+7 = 1711_{10}$$

$$\overset{2}{7}\overset{1}{B}\overset{0}{F}_{16} = 7*16^2+B*16^1+F*16^0 = 7*256+11*16+15*1$$
$$= 1792+176+15 = 1983_{10}$$

2) Перевод целых чисел из десятичной системы счисления в любую другую.

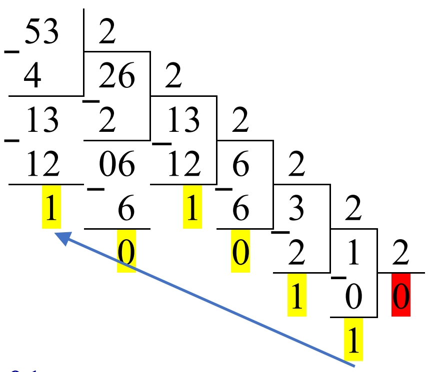
Алгоритм перевода целого числа из десятичной системы счисления в любую другую:

1) последовательно выполнять деление исходного целого десятичного числа и получаемых целых частных на основание системы в которую переводим столбиком нацело с остатком до тех пор, пока частное от деления не окажется равным нулю;

2) искомое число записываем из полученных остатков в обратном порядке (от последнего остатка к первому).

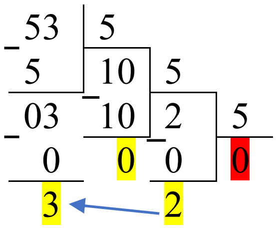
Например. Перевести из десятичной системы счисления:

1) $53 \rightarrow A_2$ (перевести из десятичной в двоичную)



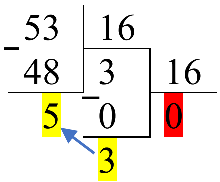
Ответ: $53 = 110101_2$

2) $53 \rightarrow A_5$ (перевести из десятичной в пятеричную)



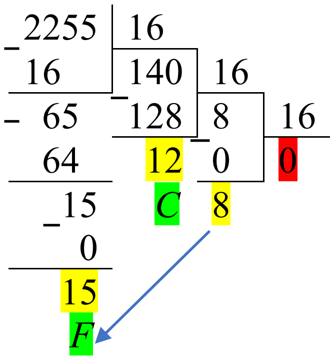
Ответ: $53 = 203_5$

3) $53 \rightarrow A_{16}$ (перевести из десятичной в шестнадцатеричную)



Ответ: $53 = 35_{16}$

2) $2255 \rightarrow A_{16}$ (перевести из десятичной в шестнадцатеричную)



т.к. в шестнадцатеричной системе счисления 16 цифр и после цифры 9 они заменяются на латинские буквы, т.е 10(*A*), 11(*B*), 12(*C*), 13(*D*), 14(*E*), 15(*F*).

Ответ: $2255 = 8CF_{16}$

3) Перевод десятичных дробей из десятичной системы счисления в любую другую.

Алгоритм перевода десятичной дроби из десятичной системы счисления в любую другую.:

1) последовательно выполнять умножение исходной десятичной дроби и получаемых дробей на основание системы в которую переводим до тех пор, пока не получим нулевую дробную часть или не будет достигнута требуемая точность вычислений;

2) получаем искомую дробь, записав полученные целые части произведений в прямой последовательности.

Например: Перевести из десятичной системы счисления:

1) $0{,}5625 \rightarrow A_2$ (перевести из десятичной в двоичную)

0	× 5625 2
1	× 1250 2
0	× 2500 2
0	× 5000 2
1	0000

Ответ: $0{,}5625 = 0{,}1001_2$

2) $0{,}65625 \rightarrow A_8$ (перевести из десятичной в восьмеричную)

0	× 65625 8
5	× 25000 8
2	0000

Ответ: $0{,}65625 = 0{,}52_8$

3) $0{,}65625 \rightarrow A_{16}$ (перевести из десятичной в шестнадцатеричную)

0	× 65625 16
10 A	× 50000 16
8	00000

Ответ: $0{,}65625 = 0{,}A8_{16}$

4) $0{,}34 \rightarrow A_2$ (перевести из десятичной в двоичную)

0	× 34 2
0	× 68 2
1	× 36 2
0	× 72 2
1	× 44 2
0	× 88 2
1	76

…

Очевидно, что этот процесс может продолжаться бесконечно, авая все новые и новые знаки в изображении двоичного эквивалента числа $0{,}34_{10}$. Такой бесконечный процесс обрывают на некотором шаге, когда считают, что получена требуемая точность представления числа.

Ответ: $0{,}34 = 0{,}010101_2$

Перевод чисел, содержащих и целую, и дробную часть, производится в два этапа. Отдельно переводится по соответствующему алгоритму целая часть и отдельно – дробная. В итоговой записи полученного числа целая часть от дробной отделяется запятой.

Демо-варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Перевести числа из римской системы счисления в десятичную:
   MXMMLMDVII,   XCLIV.
2. Запишите десятичные числа в римской системе счисления:
   122,   3956.
3. Перевести в десятичную систему счисления:
   11011011_2, 12121_3, $EB5_{16}$.
4. Перевести из десятичной системы в систему счисления:
   $458 \rightarrow A_{16}$, $55 \rightarrow A_8$, $132 \rightarrow A_2$.
5. Вычислите. Ответ представьте в десятичной системе счисления:
   $C6_{16} + 343_5 - 101110_2$

Вариант 2

1. Перевести числа из римской системы счисления в десятичную:
   XMMMLDICV,   ICXLIVII.
2. Запишите десятичные числа в римской системе счисления:
   456,   2894.
3. Перевести в десятичную систему счисления:
   11111111_2, 12426_7, $9CF_{16}$.
4. Перевести из десятичной системы в систему счисления:
   $3026 \rightarrow A_{16}$, $455 \rightarrow A_7$, $112 \rightarrow A_3$.
5. Вычислите. Ответ представьте в десятичной системе счисления:
   $1B5_{16} + 123_4 - 1101110_2$